Il metodo delle secanti o delle corde

4 Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso $[a\,;\,b]$ e si supponga che negli estremi di tale intervallo la funzione assuma valori, $f(a)$ e $f(b)$, discordi in segno. Infine si supponga che nell'intervallo aperto $(a\,;\,b)$ la derivata seconda $f''(x)$ esista e sia sempre positiva o sempre negativa.
In tali ipotesi, per il teorema del n. 3, l'equazione

$$f(x)=0 \tag{1}$$

ammette una e una sola soluzione nell'intervallo $(a\,;\,b)$. Allo scopo di determinarne un'approssimazione, tracciamo il grafico di $y=f(x)$ nell'intervallo che stiamo considerando e congiungiamone i punti estremi, $A(a\,;\,f(a))$ e $B(b\,;\,f(b))$, con un segmento.
L'ascissa x_1 del punto d'intersezione di tale segmento con l'asse delle ascisse può essere considerata come una prima approssimazione della soluzione, $\bar{x}$, della (1) (fig. 4).

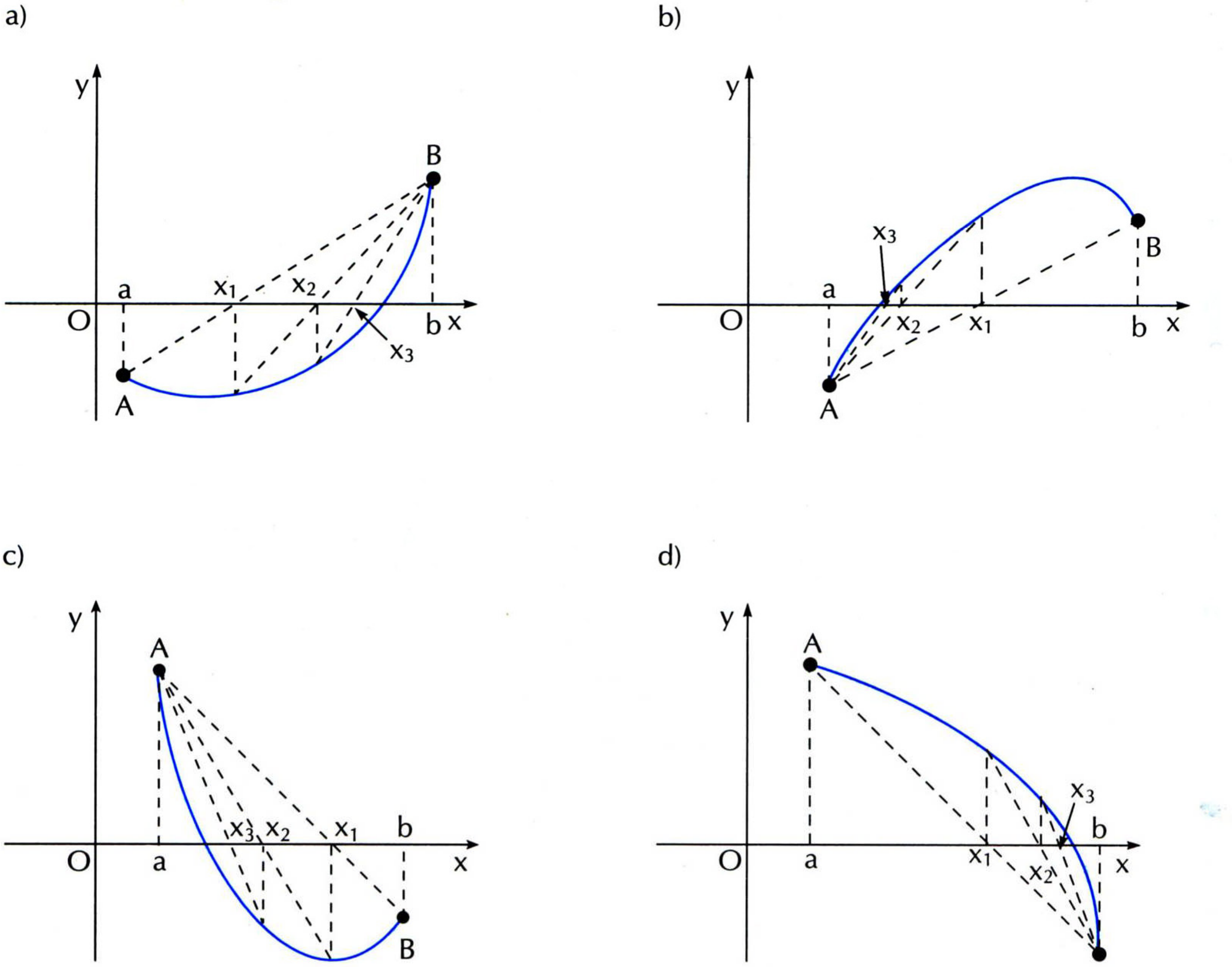

Fig. 4

Per calcolare x_1, scriviamo l'equazione della retta passante per i punti A e B. Essa è

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

L'ascissa del punto di intersezione di tale retta con l'asse delle x si ottiene sostituendo $y = 0$ in questa equazione:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)} \longrightarrow x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

e quindi si ha

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a). \tag{2}$$

Supponiamo ora, per fissare le idee, che sia $f''(x) > 0$ in $(a\,;\,b)$ e che risulti $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
In tali ipotesi si potrebbe dimostrare (e del resto non è difficile convincersene osservando la figura 4a) che risulta

$$a < x_1 < b$$

e che la radice $\bar{x}$ della (1) è contenuta nell'intervallo $(x_1\,;\,b)$. Possiamo pertanto applicare nuovamente il procedimento descritto all'intervallo $(x_1\,;\,b)$, per avere una seconda approssimazione x_2 (fig. 4a). Si ottiene (*)

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)} f(x_1) \tag{3}$$

e risulta $a < x_1 < x_2 < b$, con $\bar{x} \in (x_2\,;\,b)$.
Continuando in questo modo si costruisce una successione $\{x_n\}$ così definita (**)

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} f(x_n). \end{cases} \tag{4}$$

Per le considerazioni prima svolte, si avrà

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < b.$$

La successione $\{x_n\}$ è perciò monotona e limitata e dunque converge a un limite c; si ha quindi

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = c.$$

Passando al limite in entrambi i membri della (4), si ha

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left[x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} f(x_n) \right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow c = c - \frac{b-c}{f(b)-f(c)} f(c) \longrightarrow f(c) = 0 \longrightarrow c = \bar{x}.$$

Perciò il limite della successione $\{x_n\}$ è la soluzione, $\bar{x}$, della (1). Possiamo considerare ciascuno dei valori x_n come un'approssimazione di $\bar{x}$, affetta da un errore pari a $|\bar{x} - x_n|$.

Per definizione di limite, tale errore può sempre essere reso minore di una qualsiasi quantità positiva prefissata, a condizione di prendere n abbastanza grande.
È importante rilevare che le nostre considerazioni sono state svolte nel caso in cui è $f''(x) > 0$ in $(a\ ;\ b)$, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (fig. 4a). Si può osservare (fig. 4d) che la (4) è valida anche nel caso in cui sia $f''(x) < 0$, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Negli altri due casi (figg. 4b e 4c), le (4) andranno così modificate,

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{a - x_n}{f(a) - f(x_n)} f(x_n), \end{cases} \tag{5}$$

come indicato anche dalla tabella che si vedrà alla fine del n. 7 e che riassume tutte le possibilità. Si può anche ricorrere a questa regola mnemonica: il metodo parte dall'estremo in cui la funzione ha segno opposto a quello della derivata seconda: cioè se risulta $f''(x) \cdot f(a) < 0$ si pone $x_0 = a$ e si applica la (4), se è invece $f''(x) \cdot f(a) > 0$ si pone $x_0 = b$ e si applica la (5).
In ogni caso si ottiene una successione $\{x_n\}$, convergente alla soluzione della (1). Se tale successione è crescente, risulta costituita da approssimazioni per difetto della soluzione, $\bar{x}$, della (1); se invece è decrescente, i valori x_n sono approssimazioni per eccesso di $\bar{x}$.

(*) La (3) si può anche ottenere direttamente dalla (2), sostituendo in essa x_2 al posto di x_1 e x_1 al posto di a.

(**) Si noti che la (2) non è altro che la seconda delle (4) ove si ponga $n = 0$, $x_0 = a$.